Rij van Fibonacci

De **rij van Fibonacci** is genoemd naar Leonardo van Pisa, bijgenaamd Fibonacci ("zoon van Bonaccio", namelijk van Guglielmo dei Bonaccio). Hij noemt de rij in zijn boek *Liber abaci* (*Boek van het telraam*) uit 1202. De rij blijkt interessante eigenschappen en verbanden te bezitten met onder andere de gulden snede.

De rij (ook wel *reeks* van Fibonacci genoemd) begint met 0 en 1 en vervolgens is elk volgende element van de rij steeds de som van de twee voorgaande elementen. De eerste elementen van de rij[1] zijn dan als volgt:

> *0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, ...*

Het is evenwel niet duidelijk wie als eerste de rij heeft uitgedacht. Toen Fibonacci 20 jaar was, ging hij naar Algerije waar hij Indiase en Arabische wiskunde bestudeerde. Wellicht leerde hij daar de rij kennen.

Men laat de rij ook wel met 1 en 1 beginnen in plaats van 0 en 1.

Inhoud

Definitie

De manier waarop de rij van Fibonacci gedefinieerd is, is een voorbeeld van wat in de wiskunde een recursieve definitie genoemd wordt. Dit betekent dat de elementen vastgelegd worden op basis van een of meer voorgaande elementen; dit leidt tot een differentievergelijking. Het *n*-de getal van Fibonacci wordt zo gegeven door:

$$f_0 = 0$$
$$f_1 = 1$$
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$, voor $n > 1$

De eerste twee elementen zijn per definitie 0 en 1 (sommigen hanteren 1 en 1). Ieder volgend element is de som van de twee voorafgaande waarden. Ook andere waarden voor de eerste twee elementen zijn mogelijk, maar leveren een andere rij (bijvoorbeeld de rij van Lucas).

Veel differentievergelijkingen hebben geen *gesloten uitdrukking* of *expliciet voorschrift*, waarmee het n-de element enkel aan de hand van het getal n bepaald kan worden. Voor de rij van Fibonacci bestaat een dergelijke uitdrukking wel, namelijk:

$$f_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$

Bovenstaande formule, voor het eerst gepubliceerd in 1730 door Abraham de Moivre, is op het eerste gezicht opvallend omdat f_n een geheel getal is, terwijl de formule wortels bevat. Zie differentievergelijking voor een bewijs van deze formule.

Voortbrengende functie

Uit de recursievergelijking kan worden afgeleid dat de voortbrengende functie voor de rij van Fibonacci gelijk is aan

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$$

Dit kan op volgende manier:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \\
&= f_0 x^0 + f_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n \\
&= 0 + 1x + \sum_{n=2}^{\infty} (f_{n-2} + f_{n-1}) x^n \\
&= x + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^{n-2} + x \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^{n-1} \\
&= x + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n + x \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n \\
&= x + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n + x \left(-f_0 x^0 + \left(f_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n \right) \right) \\
&= x + x^2 S + x \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \right) \\
&= x + x^2 S + xS.
\end{aligned}$$

Daaruit volgt dan:

$$S = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Geschiedenis

De rij van Fibonacci wordt al genoemd in de *Chhandah-shāstra* („kunst van de versmaat“) van de Sanskriet schrijver Pingala (ca. 450 v. Chr. of volgens andere datering ca. 200 v. Chr.)[2] onder de naam *maatraameru* („berg van de cadens“). Uitvoeriger behandelden in de 6e eeuw Virahanka en later Acharya Hemachandra (1089–1172) de rij, om rekentechnisch het metrum te beschrijven door de regelmatige verdeling in korte en lange lettergrepen.

In het westen was het de Italiaanse wiskundige Fibonacci die als eerste de rij noemt in zijn *Liber abaci* (boek van de rekenkunst) bij het 'konijnenprobleem'.[3]

Konijnenrij

De rij van Fibonacci blijkt ook op te duiken bij de studie van een konijnenpopulatie, vandaar soms de bijnaam *konijnenrij*. Fibonacci gebruikte hiervoor de volgende regels:

- we starten zonder konijnenparen en in de eerste maand hebben we één jong paar
- een paar is volwassen vanaf de tweede maand
- een volwassen paar krijgt elke maand één nieuw paar nakomelingen
- de konijnen sterven niet

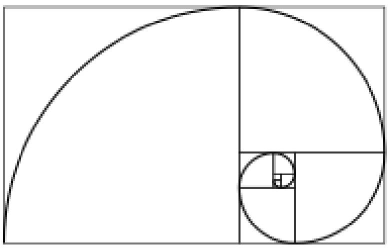
Het aantal aanwezige konijnenparen in een maand groeit dan precies volgens: *1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89* ....

Fibonacci's berekening van een konijnenpopulatie in zijn *Liber abaci*

Bijen

Een nieuwe (historische) analyse van Fibonacci en zijn werk wijst niet op konijnen maar op bijen. Gedurende zijn verblijf in Algerije bracht Fibonacci tijd door in (de buurt van) de stad Béjaïa – in die tijd een belangrijke exporteur van bijenwas (*bougie*, een Frans woord voor kaars, is afgeleid van de naam van deze stad). Anders dan bij het konijnenprobleem, waar een aantal niet in alle gevallen even realistische regels gebruikt worden, blijkt de ontwikkeling van een bijenpopulatie ook in werkelijkheid volgens de rij van Fibonacci te verlopen. Er wordt gesuggereerd dat feitelijk de bijenhouders van Béjaïa en kennis van de bijenstambomen de inspiratie voor de rij van Fibonacci vormden.[4]

Gulden snede en de natuur



Fibonaccispiraal

Men kan de formule voor de n-de term uit de reeks ook uitdrukken in de gulden snede:

$$f_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

Hierin is:

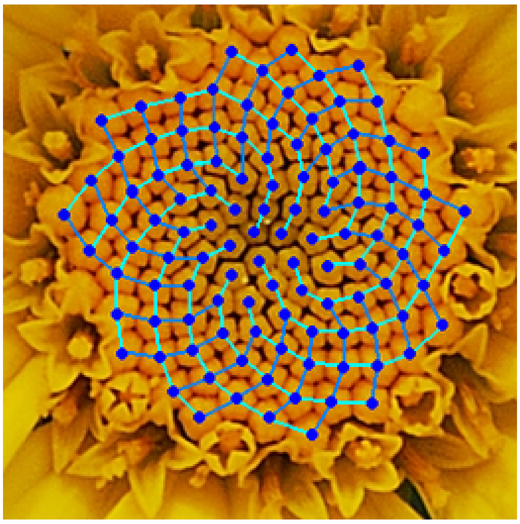
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

het gulden getal.

Wanneer men de verhouding van twee opeenvolgende getallen van Fibonacci neemt, blijkt deze de gulden snede te benaderen. In de limiet is deze verhouding er zelfs aan gelijk, dit kan men wiskundig noteren als:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi$$

Naast het verband met de gulden snede blijken de getallen van Fibonacci ook elders in de natuur voor te komen. Bekijk bijvoorbeeld de structuur van een zonnebloem en tel het aantal spiralen waarin de zonnebloempitten gerangschikt zijn. Fibonacci-reeksen komen ook terug in de verdeling van takken aan bomen, de ordening van bladeren aan takken, de vruchten van een ananas, de bloemen van een artisjok, een ontvouwende varen, de ordening van de schubben van een dennenappel en de reeds genoemde honingbijenpopulaties. Ook het vermeerderen van bloembollen, zoals die van sneeuwklokjes en krokussen, verloopt volgens de fibonacci-reeks: elk jaar 1,618 keer zoveel bollen, oftewel een groei van ruim 60%.



Kamille toont de 21 (blauw) en 13 (lichtblauw) spiralen. Dergelijke ordeningen met betrekking tot opeenvolgende Fibonacci-getallen komen voor in een grote variëteit aan planten.

Fibonacci en matrixrekening

De differentievergelijking kan in matrixvorm geschreven worden als:

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{bmatrix}$$

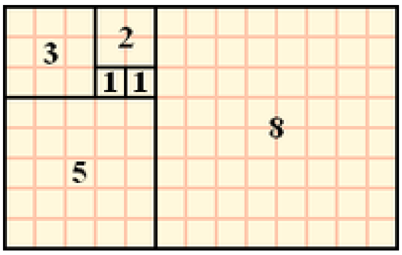
Dit betekent immers:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

en

$$f_{n-1} = f_{n-1}$$

Door herhaald toepassen krijgen we:



Een tegelwand van vierkanten met afmetingen uit de rij van Fibonacci

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} f_{n-2} \\ f_{n-3} \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De enig nodige berekening is het bepalen van de macht van de volgende matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Deze kan gevonden worden zonder dat men de voorgaande waarden moet berekenen. Voor deze macht bestaat ook een gesloten vorm, zie macht van een matrix voor de uitwerking.

Veralgemeningen

Er bestaan varianten op de rij van Fibonacci waarbij de elementen niet ontstaan uit de som van twee, maar uit de som van drie of meer voorgaande elementen. Indien we de drie eerste elementen vastleggen en vanaf het vierde de som van de drie voorgaande nemen, dan verkrijgen we een rij die wel de rij van *Tribonacci* wordt genoemd. Op analoge wijze spreekt men van de rij van *Tetra(bo)nacci*indien we de som van de vier voorgaande getallen nemen. Men kan dit verder veralgemenen naar de som van de *n* voorgaande elementen. Hoewel Fibonacci (van *filius Bonacci*, zoon van Bonacci) een naam is, zijn tribonacci en tetra(bo)nacci dit natuurlijk niet.

- Tribonacci[5]: 0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, 5768, ...
- Tetranacci[6]: 0, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, 208, 401, 773, 1490, 2872, 5536, ...

Deze getalrijen bevatten echter niet de karakteristieke eigenschappen die aan de Fibonacci-getallen toegeschreven worden; er is geen relatie met de gulden snede, en deze rijen kunnen dus ook niet fungeren als hulpmiddel bij het creëren van wat men als 'esthetisch ideaal' betitelt.

Fibonacci omgekeerd

Wanneer er twee opeenvolgende termen uit de rij van Fibonacci bekend zijn, bijvoorbeeld f_{N-1} en f_N , kan men het deel van de rij dat hieraan voorafging reconstrueren aan de hand van de volgende recursieve formule:

$r_0 = f_N$
$r_1 = f_{N-1}$
$r_n = r_{n-2} - r_{n-1}$, voor *n* > 1

Deze definitie stelt ons bovendien in staat om f_n, voor *n* < 0 te vinden. De eerste paar termen van deze negatieve rij van Fibonacci zien er als volgt uit voor $r_0 = f_1 = 1$ en $r_1 = f_0 = 0$:

1, 0, 1, -1, 2, -3, 5, -8, 13, -21, 34, -55, 89, -144, 233, -377, 610, -987, 1597, -2584, 4181, -6765, 10946, ...

Test

Door een test, geformuleerd door Ira Gessel in 1972, is eenvoudig te controleren of een getal in de rij van Fibonacci voorkomt:

Het positieve gehele getal *n* komt voor in de rij van Fibonacci dan en slechts dan als $5n^2 + 4$ of $5n^2 - 4$ een kwadraat is.

Het negatieve gehele getal n komt voor in de rij van Fibonacci dan en slechts dan als $5n^2+4$ een kwadraat is.

Trivia

Decimale breuken

Er bestaan rationale getallen die in hun decimale ontwikkeling de rij van Fibonacci vertonen.

In groepen van twee decimalen bijvoorbeeld:

$$1/(1-0,0101) = 1,010203.050813.213455.904636.832003.232549...$$

De plaats van de term 89 wordt gestoord door de driecijferige term 144, en die weer door de volgende.

In groepen van drie decimalen:

$$1/(1-0,001001) = 1,001002.003005.008013.021034.055089.144233.377610...$$

Verderop zal het laatste driecijferige getal gestoord worden door zijn viercijferige volger.

Zie ook

- Fibonacciwoord
- Rij van Lucas
- Rij van Padovan
- Stelling van Zeckendorf
- Fibonaccigedicht

Bronnen, noten en/of referenties

- (en) Eric W. Weisstein: *Fibonacci Number*, MathWorld

1. rij A000045 in OEIS
2. Parmanand Singh: *Acharya Hemachandra and the (so called) Fibonacci Numbers.* In: Mathematics Education 20,1 (Siwan, 1986), S. 28–30, ISSN 0047-6269]
3. Baldassare Boncompagni (Hrsg.): *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo*, Bd. I, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, Rom, 1857, S. 283–284 (Kap. XII, 7: „Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur“)
4. (en) T.C. Scott; P. Marketos, On the Origin of the Fibonacci Sequence. MacTutor History of Mathematics archive, University of St Andrews (8 maart 2014).
5. rij A000073 in OEIS
6. rij A000078 in OEIS